

数学

【解答】

問1 (解答例)

- (1) 不等式 $x^2 - (3a+2)x + 2a^2 - 3a + 1 > 0$ について、判別式を用いて場合分けをして考える。2次方程式の判別式 D は次のようになる。

$$D = (3a+2)^2 - 4(2a^2 - 3a + 1) = a^2 + 24a$$

- (i) 判別式 $D < 0$ の場合、すなわち、 $-24 < a < 0$ のとき、2次関数のグラフは上に開いた放物線となり x 軸と交わらない。この場合は、常に正となる。

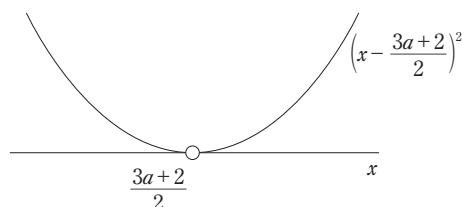
したがって、不等式の解は、 x はすべての実数となる。

- (ii) 判別式 $D = 0$ の場合、すなわち、 $a = 0$ または $a = -24$ のとき、不等式は、

$$\left(x - \frac{3a+2}{2}\right)^2 > 0$$

となる。この場合、2次方程式は重解を持ち放物線は1点で x 軸と接する。この場合はグラフが1点だけ0になり、それ以外では正となる。

したがって、下のようなグラフになることから、不等式の解は、 x は $\frac{3a+2}{2}$ を除くすべての実数(ただし、 $a = 0$ または $a = -24$)となる。



- (iii) 判別式 $D > 0$ の場合、すなわち、 $a < -24$ または $a > 0$ のとき、不等式は、

$$\left(x - \frac{3a+2-\sqrt{a^2+24a}}{2}\right) \times \left(x - \frac{3a+2+\sqrt{a^2+24a}}{2}\right) > 0$$

となる。この場合、2次方程式は異なる2つの実数解を持ち、放物線が x 軸と2点で交わる。このとき、不等式の解は、

$$x < \frac{3a+2-\sqrt{a^2+24a}}{2} \text{ または } x > \frac{3a+2+\sqrt{a^2+24a}}{2}$$

(ただし、 $a < -24$ または $a > 0$)

となる。

したがって、(i)~(iii)から、

$$\begin{cases} -24 < a < 0 \text{ のとき、} \\ \quad x \text{ はすべての実数} \\ a = 0 \text{ または } a = -24 \text{ のとき、} \\ \quad x \text{ は } \frac{3a+2}{2} \text{ を除くすべての実数} \\ a < -24 \text{ または } a > 0 \text{ のとき、} \\ \quad x < \frac{3a+2-\sqrt{a^2+24a}}{2} \text{ または} \\ \quad x > \frac{3a+2+\sqrt{a^2+24a}}{2} \end{cases}$$

となる。

- (2) 場合分けをする。

- (i) $x^2 - x \geq 0$ のとき、すなわち、 $x \leq 0, 1 \leq x$ のとき、与えられた不等式は、

$$x^2 - x > 1 - x$$

となる。すなわち、 $x^2 > 1$ 、

ゆえに $(x-1)(x+1) > 0$

これを解いて、 $x < -1, 1 < x$ となる。

場合分けの条件である $x \leq 0, 1 \leq x$ と不等式の解の共通範囲を求めると、

$$x < -1, 1 < x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。

- (ii) $x^2 - x < 0$ のとき、すなわち、 $0 < x < 1$ のとき、与えられた不等式は、

$$-(x^2 - x) > 1 - x$$

すなわち、 $(x-1)^2 < 0$ となるため、これを満たす実数 x は存在せず

解なし $\cdots \cdots \textcircled{2}$

となる。

したがって、求める解は、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ を合わせた範囲であるから、

$$x < -1, 1 < x$$

- (3) 不等式 $x^2 - x - 2 > 0$ から、 $(x+1)(x-2) > 0$ となる。これを解いて、

$$x < -1, 2 < x \quad \cdots \cdots ①$$

また、不等式 $x^2 - (a+1)x + a < 0$ から、

$(x-a)(x-1) < 0$ となる。よって、

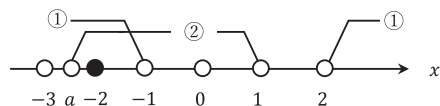
$$\left. \begin{array}{l} a < 1 \text{ のとき、} a < x < 1 \\ a = 1 \text{ のとき、} (x-1)^2 < 0 \\ \text{であるため、解なし} \\ a > 1 \text{ のとき、} 1 < x < a \end{array} \right\} \quad \cdots \cdots ②$$

①と②を同時に満たす整数 x がちょうど1つ存在するのは、 $a < 1$ または $a > 1$ のときである。したがって、場合分けをすると、

(i) $a < 1$ のとき

下の図から、 $a < x < 1$ の範囲の整数が -2 であればよい。

したがって、 $-3 \leq a < -2$ となる。

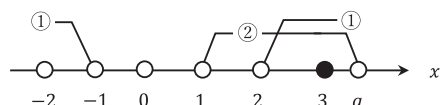


(ii) $a > 1$ のとき

下の図から、 $1 < x < a$ の範囲の整数が3であればよい。

したがって、 $3 < a \leq 4$ となる。

以上から求める解は、 $-3 \leq a < -2$ 、 $3 < a \leq 4$ となる。



問2 (解答例)

(1) $\triangle ABD$ において、

$$\angle ADB = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ABD) = 45^\circ \text{ となる。}$$

したがって、正弦定理から、

$$\frac{BD}{\sin 60^\circ} = \frac{200}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{よって、} BD = \frac{200}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 60^\circ = 100\sqrt{6} \text{ (m)}$$

(2) $\triangle ABC$ において、

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle ABC + \angle BAC) = 45^\circ \text{ となる。}$$

したがって、 $\triangle ABC$ は直角2等辺三角形になるため、 $BC = 200\sqrt{2}$ (m) となる。

したがって、 $\triangle BCD$ において余弦定理により、

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2 \cdot BC \cdot BD \cdot \cos 30^\circ = 20000$$

となる。よって、 $CD = 100\sqrt{2}$ (m)

(3) 4つの地点のA、B、C、Dについて、AとBが直線CDに関して同じ側にある、

$\angle CAD = \angle CBD (= 30^\circ)$ となるため、4つの地点

A、B、C、Dは1つの円周上にあるため、3つの地点A、B、Cを結んだ $\triangle ABC$ と、3つの地点A、B、Dを結んだ $\triangle ABD$ の外接円は同一となる。したがって、半径の差はない。

(別解) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと、正弦定理より、

$$\frac{200}{\sin 45^\circ} = 2R$$

よって、 $R = 100\sqrt{2}$ (m) となる。一方、 $\triangle ABD$ についても、 $\angle ADB = 45^\circ$ となるので、外接円の半径を R' とおくと、正弦定理より、

$$\frac{200}{\sin 45^\circ} = 2R'$$

よって、 $R' = 100\sqrt{2}$ (m) となる。

したがって、半径の差はない。

問3 (解答例)

- (1) $a=1$ のとき、直線 l は、 $y=x-1$ となる。放物線 C 上の点を $A(t, t^2)$ としたとき、直線 l との距離が最小になるのは、放物線 C 上の点 A における接線の傾きが 1 となるため、次の式が成立する。すなわち、

$$2t=1$$

よって、点 A の座標は、 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ となる。また、点 A から直線 l に引いた垂線の傾きは、 -1 となるため、点 A を通る垂線の方程式は、

$$y = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

すなわち、 $y = -x + \frac{3}{4}$ となる。したがって、この垂線と直線 l の交点を求めると、 $x = \frac{7}{8}$ となるため、求める点の座標は、 $(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8})$ となる。

- (2) 放物線 C と直線 l の方程式より、交点を求めようとすると、次の式が得られる。

$$x^2 = ax - 1$$

すなわち、 $x^2 - ax + 1 = 0$ 。この交点が接点となるためには、判別式を D とおくと、 $D=0$ となるため、

$$D = a^2 - 4 = 0$$

となる。したがって、 $a = \pm 2$ となることから、直線 p と直線 q は、それぞれ $y = 2x - 1$ 、 $y = -2x - 1$ となる。また、放物線 C と両直線 p と q の接点は、それぞれ $(1, 1)$ 、 $(-1, 1)$ となるため、求める面積は、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{x^2 - (-2x - 1)\} dx + \int_0^1 \{x^2 - (2x - 1)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

したがって、求める面積は、 $\frac{2}{3}$ となる。

問4 (解答例)

- (1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ であるから、

$$2(1 - \cos^2 \theta) - \cos \theta - 1 = 0$$

これを整理すると、 $2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$

$\cos \theta = t$ とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ なので、

$-1 \leq t \leq 1$ となる。

また、このとき、与えられた方程式は、

$$2t^2 + t - 1 = 0 \text{ となる。}$$

これを解くと、 $t = -1$ 、 $\frac{1}{2}$ となる。したがって、

$t = -1$ のときは、 $\theta = 180^\circ$ 、 $t = \frac{1}{2}$ のときは、

$$\theta = 60^\circ$$

したがって、求める解は、 $\theta = 60^\circ, 180^\circ$

- (2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ であるから、

$$2(1 - \sin^2 \theta) + 5 \sin \theta - 4 < 0$$

整理すると、 $2\sin^2 \theta - 5 \sin \theta + 2 > 0$

$\sin \theta = t$ とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ なので、

$0 \leq t \leq 1$ となる。

また、このとき、与えられた方程式は、

$$2t^2 - 5t + 2 > 0 \text{ となる。}$$

これを解くと、 $t < \frac{1}{2}$ 、 $t > 2$ となる。 $0 \leq t \leq 1$ と

の共有範囲を求めると、 $0 \leq t < \frac{1}{2}$ となる。すな

わち、 $0 \leq \sin \theta < \frac{1}{2}$ となる。

よって、求める解は、

$$0^\circ \leq \theta < 30^\circ, 150^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

【学習アドバイス】

本学の入試の試験時間は2科目合計で100分となっているので、数学1科目での解答時間は概ね50分である。試験範囲は数学Ⅰ・Ⅱ・Aで、大問4問のうち問1と問2は全員が解答する問題であり、問3と問4はこの2問から1問を選択して解答する問題である。解答形式は、途中過程も記す記述式である（過去には選択肢から正解を選ぶ問題や空所補充形式の客観問題が出題された年度もある）。

2025年度入試を詳しく見てみよう。問1は2次関数(数学Ⅰ)からの出題で、2次不等式に関する問題である。(1)は係数に文字 a を含む2次不等式、(2)は絶対値を含む2次不等式、(3)は連立不等式を満たす整数の個数に関する問題である。問2は図形と計量(数学Ⅰ)からの出題で、正弦定理・余弦定理を用いて角度や辺の長さを求める典型問題である。問3は微分法と積分法(数学Ⅱ)からの出題で、放物線と直線に関する問題である。(1)は直線との距離が最小となるような放物線上の点の座標を求める問題で、直線と平行な接線を利用することで求めることができる。(2)は放物線と2接線で囲まれる図形の面積を求める問題で、入試において頻出の問題である。問4は図形と計量(数学Ⅰ)・三角関数(数学Ⅱ)からの出題で、 $\sin$ 、 $\cos$ を含む方程式・不等式に関する問題である。(1)(2)ともに三角比の相互関係を用いて、 $\sin$ または $\cos$ のみの方程式・不等式に変形し、因数分解をすることで求めることができる。

入試全体の難易度としては基礎～標準レベルであるが、全て記述式の問題であるため、解答結果だけではなく解答に至る過程の書き方で得点差が生じる可能性があり、計算力と記述対策が合否のカギを握る試験となっている。また、問3、問4はどちらも入試頻出のテーマからの出題であったが、2025年度は問3(微分法と積分法)の方がやや解きにくい問題だったと思われる。

対策としては、まず基本的な公式の使い方、典型問題の解法をマスターしよう。教科書に載っている例題や練習問題を自力で解けるようになることが一つの目安である。それができるようになったら教科書の節末問題や章末問題を解いて、さらに演習量を増やしてみるとよいだろう。また、学習単元の順番を工夫するのも有効である。教科書の掲載順に学習するのではなく、「2次関数」「指数関数」「対数関数」「三角関数」「微分法」「積分法」などの『関数』に関する単元や、「図形と計量」「図形の性質」「図形と方程式」などの『図形』に関する単元など、単元の特性ごとのまとまりを意識して集中的に取り組むことで効率的に学習できる。さらに、日々の勉強で意識してほしいのが『計算力』である。本学のように基本問題の割合が多い大学は、計算ミスが合否を分ける。計算力の獲得のために、一日に数題でよいので計算問題に取り組みたい。毎日の学習の中で、計算ミスを「ミスをしただけ」と片付けるのではなく、「なぜミスをしたのか」を自分で考え、対策を講じていくことが肝要である。

次に記述対策であるが、「意識して日本語の説明を入れる」ことからスタートしよう。日本語の説明を一切入れず、式の羅列のみの答案を作る受験生も少なくない。最初のうちは多すぎると思われるぐらい日本語の説明を入れ、学校の先生などに添削をしてもらいながら徐々に削っていくとよいだろう。演習で解けなかった問題も、解答・解説を見た後に自分の言葉で答案を作成してみると、学力・記述力の両方の向上に役立つ。

最後に、本学の入学試験は難問や奇問といった特殊な問題は出題されず、日々の学習の取り組みが合否に直結する試験である。特別な対策をするというよりは、基本に忠実に勉強を積み重ねていけば合格に近づいていくはずである。毎日の学習を大切に、一つずつできることを増やしていただきたい。