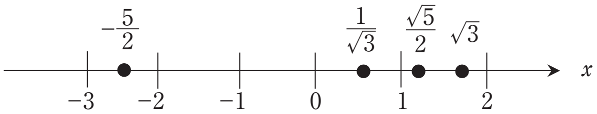
数学

【解答】

問１

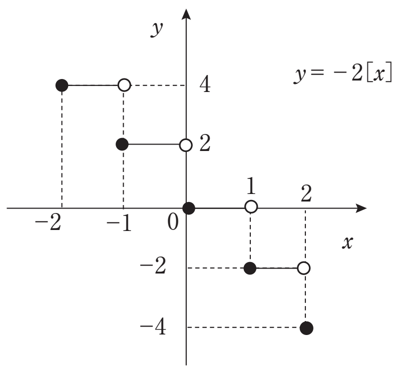
数直線上に表すと、次の図のようになる。



(1)　$[\sqrt{3}]=1$　(2)　$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]=0$　(3)　$\left[-\frac{5}{2}\right]=-3$

(4)　$\frac{[\sqrt{5}]}{2}=1$

(5)　関数 $y=-2[x]$ のグラフを $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲で描く。



$-2\leqq x<-1$ のとき、$[x]=-2$。

よって、$y=-2[x]=4$

$-1\leqq x<0$ のとき、$[x]=-1$。

よって、$y=-2[x]=2$

$0\leqq x<1$ のとき、$[x]=0$。よって、$y=-2[x]=0$

$1\leqq x<2$ のとき、$[x]=1$。

よって、$y=-2[x]=-2$

$x=2$ のとき、$[x]=2$。よって、$y=-2[x]=-4$

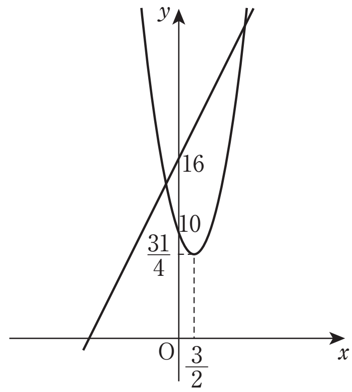
よって、グラフは上の図のようになる。

問２

(1)　$y=x^2-3x+10$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{31}{4}$$

よって、グラフは次のようになる。



$a=16$ のとき、放物線と直線の方程式から、

$$x^2-3x+10=2x+16$$

が得られる。したがって、この方程式を解くと、

$$(x+1)(x-6)=0$$

$$\therefore\quad x=-1,6$$

したがって、$x=-1$ のときは、$y=14$ となり、$x=6$ のときは、$y=28$ となるため、２つの関数の共有点は、$(-1,14)$、$(6,28)$ となる。

(2)　放物線と直線の方程式から、

$$x^2-3x+10=2x+a$$

が得られる。２つの関数が共有点がただ１つである場合は、判別式 $D=0$ となるので、

$$D=25-4(10-a)=4a-15=0$$

したがって、$a=\frac{15}{4}$ となる。

(3)　放物線と直線の方程式から、

$$x^2-3x+10=2x+a$$

が得られる。2つの関数が共有点をもたない場合は、判別式 $D<0$ となるので、

$$D=4a-15<0$$

したがって、$a<\frac{15}{4}$ となる。

問３

(1)　△ABDに余弦定理を適用すると、

$$AD^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cdot\cos\angle ABD=21$$

よって、$AD=\sqrt{21}$。同様に△ACDに余弦定理を適用すると、

$$CD^2=(\sqrt{21})^2+4^2-2\cdot4\cdot\sqrt{21}\cdot\cos\angle CAD=25$$

よって、$CD=5$。

(2)　△ACDに余弦定理を適用すると、

$$\cos\angle\mathrm{ACD}=\frac{4^2+5^2-(\sqrt{21})^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{2}$$

よって、$\angle\mathrm{ACD}=60^\circ$となる。

(3) 平面上の四角形ABCDについて考えてみる。

3点B、E、Dが1つの直線上にあるとき、BE＋EDは最小になる。△BCDに余弦定理を適用すると、

$$\mathrm{BD}^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\angle\mathrm{BCD}=61$$

BD＞0なので、$\mathrm{BD}=\sqrt{61}$。したがって、求める最小値は$\sqrt{61}$となる。

問4

(1) 玉を同時に2個取り出す方法は、${}_9\mathrm{C}_2=36$通り。

白玉と赤玉を1個ずつ取り出す方法は、${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=20$通り。

よって、求める確率は、$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{20}{36}=\dfrac{5}{9}$。

(2) 玉を同時に2個取り出す方法は、

$${}_{n+5}\mathrm{C}_2=\frac{(n+5)(n+4)}{2\times1}=\frac{1}{2}(n+5)(n+4)\text{通り}$$

となる。

白玉を2個取り出す方法は、${}_5\mathrm{C}_2=10$通り。

よって、白玉を2個取り出す確率は、

$$\frac{10}{\frac{1}{2}(n+5)(n+4)}=\frac{20}{(n+5)(n+4)}$$

となり、これが$\dfrac{2}{11}$であるから、

$$\frac{20}{(n+5)(n+4)}=\frac{2}{11}$$

よって、$(n-6)(n+15)=0$となり、nは自然数なので、$n=6$。

(3) 玉を同時に2個取り出す方法は、

$${}_{n+5}\mathrm{C}_2=\frac{(n+5)(n+4)}{2\times1}=\frac{1}{2}(n+5)(n+4)\text{通り}$$

となる。

一方で、白玉と赤玉を1個ずつ取り出す方法は、${}_5\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_1=5n$通りとなる。

よって、白玉と赤玉を1個ずつ取り出す確率は、

$$\frac{5n}{\frac{1}{2}(n+5)(n+4)}=\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

となり、これが$\dfrac{15}{28}$であるから、

$$\frac{10n}{(n+5)(n+4)}=\frac{15}{28}$$

よって、$(n-3)\left(n-\dfrac{20}{3}\right)=0$となり、$n$は自然数なので、$n=3$。

【学習アドバイス】

本学の入試は、4科目の中から2科目を選択して解答する形式であり、試験時間は2科目合計で100分となっているので、数学1科目での解答時間は概ね50分である。試験範囲は数学Ⅰ・Ⅱ・Aで、問題数は大問4題、問1と問2は全員が解答する問題であり、問3と問4はこの2題のうち1題を選択して解答する問題である。解答形式は、途中過程も記す記述式である（過去には選択肢から正解を選ぶ問題や空所補充形式の客観問題が出題された年度もある）。

今年度入試について分析してみよう。問1は数と式（数学Ⅰ）からの出題で、ガウス記号に関する問題である。(1)～(4)は具体的な値を考える問題で、問題文のガウス記号の定義が理解できれば解答できる。(5)はグラフを描く問題で、ガウス記号に慣れていないと解答は難しかったと思われる。問2は2次関数（数学Ⅰ）からの出題で、放物線と直線の位置関係に関する問題である。直線の式には文字定数aが含まれているが、(1)はaの値が具体的に与えられているので難しくない。(2)は放物線と直線が接する条件、(3)は放物線と直線が共有点をもたない条件を考察する問題で、いずれも判別式で対応できる。問3は図形と計量（数学Ⅰ）からの出題で、四面体が題材の問題である。(1)(2)は余弦定理から辺の長さおよび角の大きさを求める問題で難度は高くない。(3)は線分の長さの和の最小値を考える問題で、展開図を考えることがポイントである。問4は確率（数学A）からの出題で、玉の取り出しに関する問題である。赤球の個数がn個という設定であるが、(1)はnの値が具体的に与えられているので難しくない。(2)(3)は条件を満たすnを求める問題で、nを含んだ立式が必要となる。

問3、問4は選択問題であるが、どちらも入試基礎レベルの問題であり、大きな難易度の差はみられない。全体の難易度としては基礎レベルであるが、すべて記述式の問題であるため、解答結果だけではなく解答に至る過程の書き方で得点差が生じる可能性があり、計算力と記述対策が合否のカギを握る試験となっている。

対策としては、まず基本的な公式の使い方、典型問題の解法をマスターしよう。教科書に載っている例題や練習問題を自力で解けることが一つの目安である。それができるようになったら教科書の節末問題や章末問題を解いて、さらに演習量を増やしてみるとよいだろう。また、学習の際には学習単元の順番を工夫するのも有効である。教科書の掲載順に学習するのではなく、「2次関数」「指数関数」「対数関数」「三角関数」「微分法」「積分法」などの『関数』に関する単元や、「図形と計量」「図形の性質」「図形と方程式」などの『図形』に関する単元など、単元の特性ごとのまとまりを意識して集中的に取り組むことで効率的に学習できる。さらに、日々の勉強で意識してほしいのが『計算力』である。本学のように基本問題の割合が多い大学は、計算ミスが合否を分ける。計算力の獲得のために、一日に数題でよいので計算問題に取り組みたい。毎日の学習の中で、計算ミスを「ミスをしただけ」と片付けるのではなく、「何故ミスをしたのか」を自分で考え、対策を講じていくことが肝要である。

次に、記述対策であるが、「意識して日本語の説明を入れる」ことからスタートしよう。日本語の説明を一切入れず、式の羅列のみの答案を作る受験生も少なくない。最初のうちは多すぎると思われるぐらい日本語の説明を入れ、学校の先生などに添削をしてもらいながら徐々に削っていくとよいだろう。演習で解けなかった問題も、解答・解説を見た後に自分の言葉で答案を作成してみると、学力・記述力の両方の向上に役立つ。

最後に、本学の入学試験は難問や奇問といった特殊な問題は出題されず、日々の学習の取り組みが合否に直結する試験である。特別な対策をするというよりは、基本に忠実に勉強を積み重ねていけば合格に近づいていくはずである。毎日の学習を大切に、一つずつできることを増やしていってもらいたい。